

CONTINUIDAD DE LA SUMA DE UNA SERIE

TEOREMA: Una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

representa una función continua $S(z)$ en cada punto del círculo de convergencia, $|z - z_0| = R$.

DEMOSTRACIÓN:

Queremos probar $\lim_{z \rightarrow z_1} S(z) = S(z_1)$, esto significa

que $|S(z) - S(z_1)| < \frac{\epsilon}{3}$ para $|z - z_1| < \delta$.

Sabemos que

$$p_N(z) = S(z) - S_N(z) \quad |z - z_0| < R$$

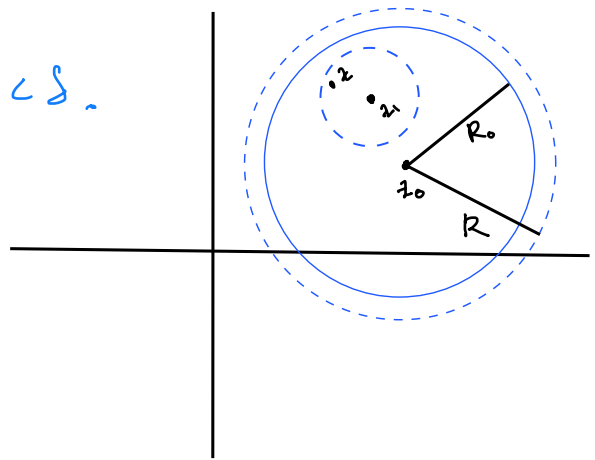
$$S(z) = S_N(z) + p_N(z)$$

entonces

$$|S(z) - S(z_1)| = |S_N(z) - S_N(z_1) + p_N(z) - p_N(z_1)|$$

$$|S(z) - S(z_1)| \leq |S_N(z) - S_N(z_1)| + |p_N(z)| + |p_N(z_1)|$$

Como converge existe $|p_N(z)| < \frac{\epsilon}{3} \quad N > N_\epsilon$



Integración y Diferenciación de series

TEOREMA! Sea G un contorno interior al círculo de convergencia de una serie de potencias y sea $g(z)$ una función continua en G . La serie formada de multiplicar cada término de la serie por $g(z)$ se puede integrar término a término, es decir

$$\int_G g(z) S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_G g(z) (z-z_0)^n dz$$

DEMOSTRACION:

$$g(z) S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n g(z) (z-z_0)^n + p_N g(z)$$

$$\Rightarrow \int_G g(z) S(z) dz = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_G g(z) (z-z_0)^n dz + \int_G p_N g(z) dz$$

Como la serie converge $|p_N| < \xi$ $N > N_\xi$

$$\text{entonces } \left| \int_G p_N g(z) dz \right| \leq \xi \cdot M \cdot L$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \int_G p_N g(z) dz = 0$$

$$\text{entonces } \int_G g(z) S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_G g(z) (z-z_0)^n dz$$

Si $g(z)=1$ entonces

$$\int_{\gamma} S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma} (z-z_0)^n = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} S(z) dz = 0$$

$\Rightarrow$ COROLARIO: La suma $S(z)$ de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ es analítica $\forall z \in$ al círculo de convergencia.

TEOREMA: La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ puede derivarse término a término, esto es

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

DEMOSTRACION:

Sea $g(s) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(s-z)^2}$, como $g(z)$ es continua en γ

$$\int_{\gamma} g(s) S(s) ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma} \frac{1}{2\pi i} \frac{(s-z_0)^n}{(s-z)^2} ds$$


pero $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{(s-z_0)^n}{(s-z)^2} ds = \frac{d}{dz} (z-z_0)^n = n(z-z_0)^{n-1}$

ademas

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{S(s)}{(s-z)^2} ds = \frac{d}{dz} S(z) = S'(z)$$

entonces

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n(z-z_0)^{n-1}$$

ejemplo 1: $f(z) = \begin{cases} \frac{e^z-1}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z=0 \end{cases}$

$$\frac{e^z-1}{z} = \left(\cancel{1} + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \cancel{-1} \cdot \frac{1}{z}$$

$$= 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots + \frac{z^{n-1}}{n!} + \dots \quad [\text{ts anal}(z_0)]$$

Exemplo:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n (-1)^n$$

$$-\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n (z-1)^{n-1} \cdot (-1)^n$$

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n (z-1)^{n-1} (-1)^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} (n+1) (z-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) (z-1)^n \quad |z-1| < 1$$

TEOREMA : Si una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < R)$$

converge a $f(z)$ en todos los puntos interiores
al círculo $|z - z_0| = R$. Entonces es la serie
de Taylor de f en $|z - z_0|$.

Demonstraci3n:

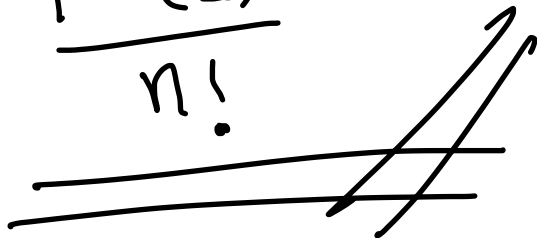
Sei $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-z_0)^m$, entonces

$$\int_{\zeta} g(z) f(z) dz = \int_{\zeta} \sum_{m=0}^{\infty} a_m g(z) (z - z_0)^m dz$$

5. $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz}_{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}} = \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{(z-z_0)^{n-m+1}} dz}_{a_n}$$

entweder $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$



Ejercicios: a) $\frac{1}{(1-z)^2}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) &= + \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 1+z+z^2+\dots+z^n+\dots \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$$

b) $\frac{1}{(1-z^3)^2}$

c) Serie de Taylor para

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+(z-2)} = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{(z-2)}{2}} \quad \text{para } z_0=2$$

y derivando término a término obtenemos

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2} \right)^n \quad |z-2| < 2$$

d) Incluye la serie $\frac{1}{w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-1)^n}{n} \quad (|z-1| < 1)$
a lo largo de un camino interior al círculo de
convergencia de $w=1$ a $w=2$ para obtener

$$\text{Log } z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad (|w-1| < 1)$$

$$\int_{w=1}^{w=2} \frac{dw}{w} = \text{Log } z - \text{Log } 1 \rightarrow 0$$

adunas

$$\frac{1}{w-1+1} = \frac{1}{1+(w-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (w-1)^n$$

$$\Rightarrow \int_{w=1}^{w=2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (w-1)^n dw = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(w-1)^{n+1}}{n+1} \Big|_{w=1}^{w=2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2-1)^{n+1}}{n+1}$$

entonces

$$\text{Log } z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

Multiplicación y División de Series

- Sea $S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

$$S_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^m$$

En la intersección de los círculos de convergencia

$$S_1(z) S_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n b_m (z - z_0)^{n+m}$$

- La $\frac{S_1(z)}{S_2(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \cdot \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^m}$

